البرهان:

$\boxed{1} \Rightarrow \boxed{2}$ وضوح

$\boxed{2} \Rightarrow \boxed{3}$

لنبرهن أن $f(x+y) \overset{?}{=} f(x) + f(y)$

$f(x+y) = f(x''+y'') = f(x'.y')'$

$= [f(x'.y')]' = [f(x').f(y')]'$

$= f(x')' + f(y')' = f(x'') + f(y'')$

$= f(x) + f(y)$

$\boxed{3} \Rightarrow \boxed{1}$ حتى يتم المطلوب يجب أن نثبت أن صورة جداء عنصرين تساوي إلى جداء صورة العنصرين.

$f(x.y) = f(x''.y'') = f(x'+y')' = (f(x'+y'))'$

$= (f(x') + f(y'))' = f(x')'.f(y')'$

$= f(x'').f(y'') = f(x).f(y)$

$\forall x, y \in A$

لنشر الحدود البوليانية: ((مجموع الجداءات القانونية)) ((أو الصورة الكاملة لمجموع جداء الحل الأصغر))

لتكن لدينا مجموعة من المتحولات والمتغيرات (الحروف والرموز) ولتكن $x_1, x_2, \dots, x_n$ عدد من المتغيرات، نقوم بتشكيل حدود بوليانية E تابع لهذه المتغيرات $E(x_1, \dots x_n)$

أي تعبير مكون من عدة المتغيرات باستخدام عمليات جبر بول "+"، "."، "'"

مثلا:
$$F = ((xy'z' + y)' + x'z)'$$
$$E = (x + y'z)' + (xyz' + x'y')$$

إن F ، E هي أشكال جدود أو تعابير بوليانية في المتغيرات x, y, z

• تسمى بحاصل الضرب الأساسي حرف أو حاصل ضرب حرفين أو أكثر بحيث لا يحتوي حرفان على نفس المتغير.

مثلا: $x'yz$, yz' , y' , xyz
هي حواصل ضرب أساسي

أما $xyx'z = 0$ ، $xyzy = xyz$
ليست حواصل ضرب أساسية.

* أي أن أي حاصل ضرب في جبر بول يمكن اختزاله إما إلى الصفر أو إلى حاصل ضرب أساسي

• ويقال أن كثيرة حدود بوليانية E مجموع حواصل ضرب أو صورة أقل حدود إذا كان E هو حاصل ضرب أساسي أو مجموع تضمن أو أكثر من حواصل الضرب الأساسية.

مثلا: $E_1 = XZ' + XYZ + X'Y$
هذا كثير حدود بوليانية عبارة عن مجموع حواصل ضرب أساسية

الخلاصة:
إن أي كثيرة حدود بوليانية أو تعبير بولياني غير صفرية يمكن وضعها في صورة مجموع جداءات بالطريقة التالية
أ- باستخدام قوانين ديمورغان ونفي النفي.
2- باستخدام قوانين التوزيع
3- باستخدام قوانين التبديل ، اللانمو ، المتمم يمكننا تحويل كل حاصل الضرب في E إلى حاصل ضرب أساسي وأخيرا باستخدام

قوانين الاختصاص يمكننا وضع E في صورة مجموع حواصل ضرب.

مثال: لنأخذ جداء كثيرة الحدود التالية F التالي والذي تساوي: $F = ((ab, c)')' . ((a'+c)(b'+c'))$

بتطبيق النظام السابق على E ينتج:

$$F = (ab + c')(a.c' + bc) = a^2bc' + abc + ac' + 0$$

- كل وحيد حد هو حاصل ضرب أساسي.
- يقال أن كثيرة الحدود البولانية غير الصفرية $E(x_1 \dots z_n)$ في الصورة الكاملة أو (مجموع جداءات قانونية مجموع) حواصل ضرب وكل حاصل ضرب (أي كل حد) يحوي جميع المتغيرات.

إذا أي كثيرة حدود بولانية يمكن وضعها بالصورة الكاملة مجموع حواصل الضرب كما في النظرية التالية:

مبرهنة !!

إن أي تعبير بولياني غير صفري يمكن وضعه في الصورة الكاملة مجموع حواصل ضرب وهذا الشكل وحيد.

[1] مثال: أكتب كلاً من كثيرات الحدود التاليتين $E_1 = xy + y'z'$ ، $E_2 = xy + xz' + yz'$ على شكل مجموع جداءات قانونية وأستنتج هل $E_1 = E_2$ ؟

الحل:

$$E_1 = xy(z+z') + y'z'(x+x')$$
$$= xyz + xyz' + xy'z' + x'y'z'$$

هذا كثير حدود الصورة الكاملة

$$E_2 = xy(z+z') + xz'(y+y) + yz'(x+x')$$

$E_2 = xyz + xyz' + xz'y + xz'y' + xy'z' + x'y'z'$

$= xyz + xz'y + xz'y' + x'y'z'$

لاحظنا أن $E_1 = E_2$

مثال 2: اكتب كل من التعبيرين الجبريين التاليين على شكل مجموع جداءات قانونية:

① $f = xy + xz + yz$

② $f(x,y,z,u,v) = x'yu'$

الحل: ① $f = xy(z+z') + xz(y+y') + yz(x+x')$

$= xyz + xyz' + xy'z + x'yz.$

② $f = x'yu'(z+z')(v+v') = (x'yzu' + x'yz'u')(v+v')$

$= x'yzu'v + x'yzu'v' + x'yz'u'v + x'yz'u'v'$

* **ملاحظة هامة:** في الجبر البولياني يمكن تمثيل التعابير والتعابير الجبرية البوليانية بعد كتابتها على شكل مجموع جداءات قانونية بمجموعة أرقام وذلك باستخدام عناصر الجبر B^n باعتبارها تمثل في النظام الثنائي أو في النظام العشري.

مثال: إذا كان: المتغير يمثل واحد والمتمم يمثل الصفر

$f = xyzw' + xyz'w + x'yz'w + x'y'zw + x'y'z'w'$

فإن عناصر المجموعة B^n المقابلة لجداءات الحدود في عبارة f هي:

$f = 1110 + 1101 + 0101 + 0011 + 0000$

$2^3 + 2^2 + 2^1 \quad + \quad 2^3\,2^2\,2^0 \quad 5 \quad 3 \quad 0$

$14 \quad 13$

الموضوع التاريخ / / 201

أسطح ... الكتب

$f = \Sigma(0,3,5,13,14)$

3) أكتب كثيرة الحدود $\Sigma(1,5,13,15) = F(x,y,z,t)$

1	+	5	13	15
0001		0101	1101	1111

$f = x'y'z't + x'yz't + xyz't + xyzt$

طريقة الجدول لإيجاد الشكل القانوني

4) مثال: أوجد الشكل القانوني لكثير الحدود

$f(x,y) = x + xy$

x	y	f
1	1	1
1	0	1
0	1	0
0	0	0

$2^2 = 4$ لأن متغيرين.

$f = xy + xy'$

5) مثال: $f = x + x'z' + xyz$

عدد متغيرات z,y,x وبالتالي يكون الجدول $2^3 = 8$

x	y	z	f	
1	1	1	1	→ xyz
1	1	0	1	→ xyz'
1	0	1	1	→ $xy'z$
1	0	0	1	→ $xy'z'$
0	1	1	0	
0	1	0	1	→ $x'yz'$
0	0	1	0	
0	0	0	1	→ $x'y'z$

نأخذ الحدود التي قيمتها 1

$f = xyz + xyz' + xyz' + xy'z + x'yz' + x'y'z$

تبسيط واختصار التعابير البوليانية :

تعريف: ليكن F، G كثيرتي حدود بوليانيتين متساويتين نقول أن كثيرة الحدود F مبسطة أو مختصرة أكثر من G إذا تحقق أحد الشرطين :

1- إذا كانت عدد ذوات الحدين F أقل من عدد ذوات الحد في G

2- إذا تساوى عدد ذوات الحد في كل من F، G فإن عدد المتغيرات ومتمماتها في F أقل من عدد المتغيرات ومتمماتها في G.

مثال:

$$F = pq + p'q'r'$$

$$G = pqr + pqr' + p'q'r'$$

إن $F = G$ ولكن F مبسطة أكثر من G

مثال (2): $F = p+q$ ، $G = p + p'q$

إن $F = G$ ولكن F مبسطة أكثر من G لأن عدد المتغيرات في F أقل من G

تعريف (2): نقول أن عبارة كثيرة الحدود البوليانية F أصغرية إذا كان لا يوجد عبارة لـ F مبسطة أو مختصرة أكثر منها

⊕ إن الهدف الأساسي هو إيجاد صيغة بسيطة للدالة البوليانية وهناك ثلاث طرائق لإنجاز ذلك:

[1] طريقة كوين مكلوسكي

[2] طريقة الإجماع

[3] طريقة أشكال "مخططات" كارنوف

الموضوع .... التاريخ / / 201

لكن من الطريقتين الأولى والثانية يمكن استخدامها
لتبسيط أي دالة بولينية مهما كان متغيراتها ويمكن
برمجتها واستخدام الحاسوب لتنفيذها إلا أنها صعبة الوصف.
أما طريقة كارنو فهي سهلة الوصف للدال بمتغيرين او ثلاث
متغيرات أو أربعة لذا فهي سوف نستعملها في هذا البحث

Oscar